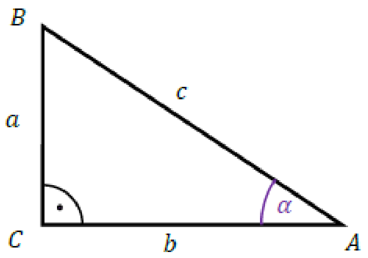
X. TRYGONOMETRIA

- Definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym:

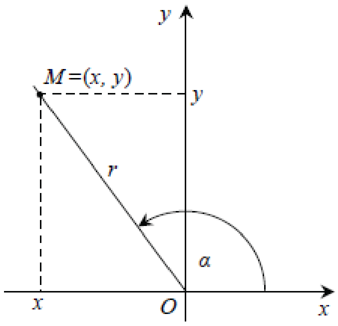


$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

- Definicje funkcji trygonometrycznych:



$$\sin\alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x},\ \text{gdy } x \neq 0$$

$$\text{gdzie } r = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$$

- Niektóre wartości funkcji trygonometrycznych:

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

- Związki między funkcjami tego samego kąta:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{dla } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad k - \text{cakowite}$$

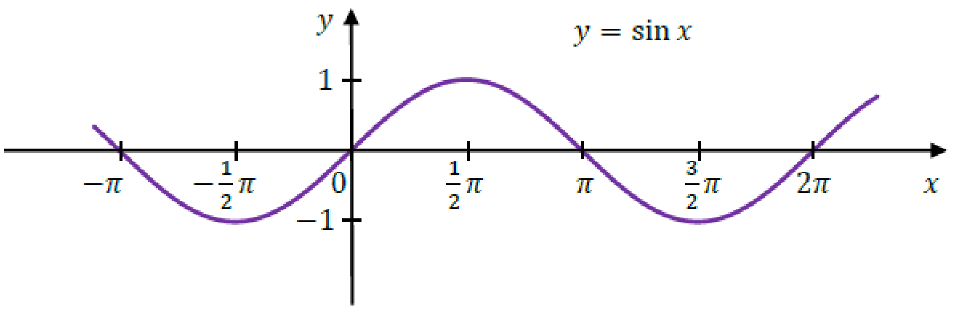
- <u>Wybrane wzory redukcyjne</u>:

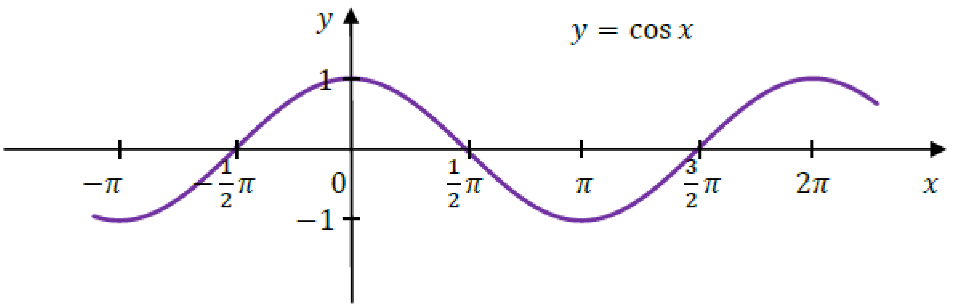
$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$ $\qquad$ $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$

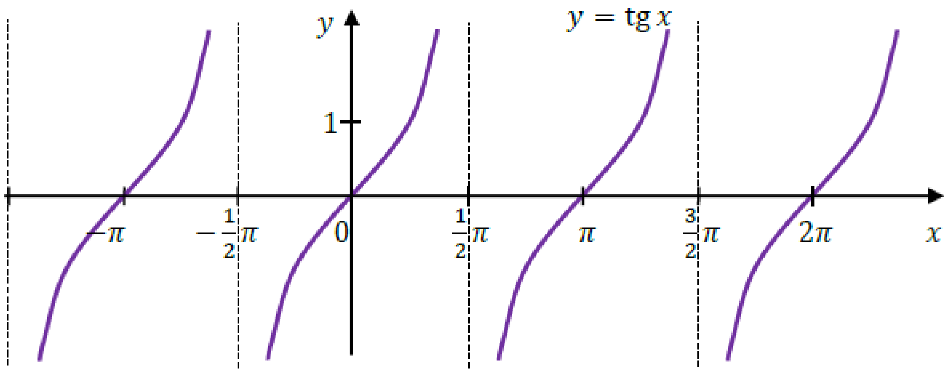
$\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$ $\qquad$ $\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ $\qquad$ $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ $\qquad$ $\mathrm{tg}(180° - \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$

- <u>Wykresy funkcji trygonometrycznych</u>:

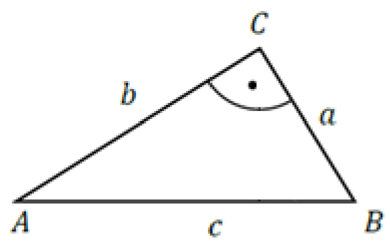






- <u>Twierdzenie Pitagorasa</u>

w trójkącie prostokątnym $\quad a^2 + b^2 = c^2$



ZADANIA:

1. W trójkącie prostokątnym ABC długości przyprostokątnych wynoszą 5 i 12. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego leżącego na przeciw dłuższej przyprostokątnej.

2. W trójkącie prostokątnym naprzeciw kąta ostrego α leży przyprostokątna długości a. Oblicz długości pozostałych boków trójkąta wiedząc, że:

   a) $a = 4,\ \alpha = 30°$ b) $a = 8$, $\operatorname{tg} \alpha = 2$

3. Podaj miarę kąta ostrego α , jeżeli:

   a) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$

4. Półprosta P ma początek w punkcie $(0,0)$, przechodzi przez punkt A i jest końcowym ramieniem kąta α , którego początkowe ramię zawiera się w dodatniej półosi OX . Oblicz:

   a) $\operatorname{tg}\alpha$, jeżeli $A = (3, 7)$ b) $\cos\alpha$, jeżeli $A = (12, 5)$

5. Oblicz wartość pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α , $\alpha \in (0°, 90°)$ wiedząc, że:

   a) $cos\, \alpha = \frac{3}{5}$

   b) $\text{tg}\ \alpha = 2$

6. W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna wynosi 12 cm, a tangens kąta ostrego jest równy 0,75. Oblicz pole tego trójkąta.

7. Oblicz wartość wyrażenia:

   a) $2\text{tg}45° - 3\sin 90° \cdot \cos 90° =$

   b) $\sin^2 30° + \cos^2 60° =$

   c) $\text{tg}45° \cdot \text{tg}60° =$

8. Sprowadź podane wyrażenie do najprostszej postaci:

a) $\operatorname{tg} x \cdot \cos x =$

b) $(1+\sin x)(1-\sin x)=$

c) $\cos x + \sin x \cdot \operatorname{tg} x =$

9. Zapisz daną liczbę w prostszej postaci:

a) $(\cos 33°)^2 + (\sin 33°)^2 =$

b) $\dfrac{\cos 55°}{\sin 55°} \cdot \operatorname{tg} 55° =$

10. Udowodnij, że podana równość jest tożsamością trygonometryczną:

a) $\cos x \cdot \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin x} = 1$

b) $\sin x \cdot \left(\dfrac{1}{\sin x} - \sin x\right) = \cos^2 x$

11. Podaj miarę kąta jaki tworzy z osią X wykres funkcji liniowej określony wzorem:

a) $f(x) = x + 3$

b) $f(x) = \sqrt{3}x + 3$

12. Podaj wzór funkcji liniowej, której wykres jest nachylony do osi X pod kątem $\alpha = 60^\circ$ oraz przechodzi przez punkt $A = \left(2, 3\sqrt{3}\right)$.

13. Rozwiąż równanie, jeśli $x \in \left(0^\circ; 90^\circ\right)$:

a) $2\cos x = \sqrt{3}$

b) $2\sin x - 1 = 0$

c) $\sin x = \sqrt{3}\cos x$

d) $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{2\cos x}$

14. a) Oblicz korzystając z podanego wzoru:

$\boxed{\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha}$

$\sin 120° =$

$\sin 135° =$

$\sin 150° =$

$\boxed{\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha}$

$\cos 120° =$

$\cos 135° =$

$\cos 150° =$

$\boxed{\mathrm{tg}(180° - \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha}$

$\mathrm{tg}\, 120° =$

$\mathrm{tg}\, 135° =$

$\mathrm{tg}\, 150° =$

b) Podaj miarę kąta rozwartego α, gdy:

$\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha =$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha =$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\alpha =$

$\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, $\alpha =$

$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha =$

$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\alpha =$

$\mathrm{tg}\,\alpha = -1$, $\alpha =$

$\mathrm{tg}\,\alpha = -\sqrt{3}$, $\alpha =$

$\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\alpha =$

15. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α, $\alpha \in (90°; 180°)$ jeśli:

a) $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$

b) $\mathrm{tg}\,\alpha = -2$

16. W układzie współrzędnych na końcowym ramieniu kąta α leży punkt A.
Podaj miarę kąta α i oblicz:

a) $\operatorname{tg}\alpha$, jeżeli $A=(-1, 3)$

b) $\cos\alpha$, jeżeli $A=(-3, 4)$

17. Oblicz miarę kąta jaki tworzy z osią X wykres funkcji liniowej określony wzorem $f(x)=-x+3$

18. Podaj wzór funkcji liniowej, której wykres jest nachylony do osi X pod kątem $\alpha=135°$ oraz przechodzi przez punkt $A=(1, 7)$.